

複合材料의 強度理論推移 Strength theory of Composites.

金 源 澤 · 金 商 郁*

1. 序 言

理論的으로 polyethylene의 引張強度¹는 2000kg/mm²가 되나 실제 측정을 하면 대략 200분의 1밖에 되지 않는다. 금속 및 요업재료는 분자배열이 高分子材料와는 판이하게 다르고 強度도 크지만 마찬가지로 理論値에는 훨씬 미달한다. 특히 금속이나 硅酸鹽材料는 딱딱하지만 때로는 상상할 수 없을 정도로 별로 높지 않은 應力에 對해서 부서질 때가 많다. 일반적으로 brittle한 물질은 強度가 理論値보다 훨씬 낮고 強度의 오차도 크다. 이와같이 낮은 應力에도 견디지 못하는 것은 아주 작은 금이 材料 속에 생긴다면 Griffith 원리²에 의해 外部의 應力이 금이 간곳의 끝부분에 집중되기 때문이다.

금이 가고 있을때는 탄성변형 energy, W_1 이 外部로 발산되어야 하며 그 크기는

$$W_1 = \frac{8(1-\nu^2)\sigma^2 c^3}{3E}$$

로 나타낼 수 있고 이때 E 는 young 을, ν 는 Poisson 比, c 는 금의 길이의 $\frac{1}{2}$, σ 는 應力이다. 그러나 금이 간다면 새로운 표면이 생겨야 하고 그단한 energy가 外部로 부터 주어져야 할 것이다. 금은 表面 energy $W_2 = 2\pi c^2 r$ 이다. 여기서 r 은 材料의 表面自由 energy이다. 이때 ΔW 는 $\Delta W = -W_1 + W_2 = 2\pi c^2 r - \frac{8(1-\nu^2)\sigma^2 c^3}{3E}$ 로 되고 금이 커가게 되는 조건에서는 $\partial \Delta w / \partial c = 0$ 이 되므로 σ 는

$$\sigma = \sqrt{\left\{ \frac{\pi}{2(1-\nu^2)} \frac{E\gamma}{c} \right\}}$$

또한 $\sigma = \left(\frac{2E\gamma}{\pi c} \right)^{1/2}$ 이다.

변형의 경우는

$$\sigma = \left\{ \frac{2}{\pi(1-\nu^2)} \frac{E\gamma}{c} \right\}^{1/2}$$
 이다.

上記 두 式을 살펴보면 금이 클때에는 外部의 應力이 작아도 쉽게 부서지고 반대로 表面 energy 와 탄성율이 큰 물질은 應力이 커야만 파괴가 된다. 그러나 이들 式은 한 방향으로 引張이 주어졌을 때 변형(deformation) 하지 않고 금이 가는 경우를 뜻한다. 그러나 어떤 물질은 변형이 선행된 후 파괴된다. 이와같이 변형을 하다가 파괴(ductile fracture) 되면 재료로서는 대체로 우수하다. 그 理由는 이런 材料의 파괴강도는 이론값에는 훨씬 못미친다 할지라도 오차가 크지 않기 때문에 엉뚱한 낮은 應力에 材料가 파괴되는 위험은 없으며 또한 대부분의 材料는 이와같은 변형을 함으로써 강도가 증가하기 때문이다. 고무의 경우 비록 탄성계수는 낮다 할지라도 변형이 쉽게 일어나 금의 끝에서의 원호의 지름을 크게 하여 응력의 집중현상을 막고, 금속도 탄성율은 크지만 금의 끝에서의 원호의 지름이 크기 때문에 금의 끝에서의 응력의 집중현상이 현저히 둔화된다. 이와같이 복합재료도 이런 특성을 갖도록 하여 낮은 應力에서의 파괴를 없애고 強度를 높이도록 해야할 것이다.

2. 強化理論

粒狀 및 板狀強化

먼저 粒狀充填材에 依한 力學的特性의 強化效果理論은 아직 완전히 확립되어 있지 않지만 가장 타당하게 여겨지는 두 理論을 살펴본다.

우선 Goodier³의 理論을 보면 Goodier는 3次元物體中에 球狀 또는 원통형충진물 또는 결합이 있는 경우의 응력집중을 일반적인 理論으로 해석하였다. Fig. 1에서 보는 바와같이 引張外力

漢陽大 工業化學科

*서울市立産業大 化學工學科

P에 의한 平均引張應力を σ_0 (P/A, A는 단면적)라면 인장축으로 부터 Q의 각도에서 원중심에서 r의 위치에 있는 點 Q의 應力を σ_0 라고 한다면

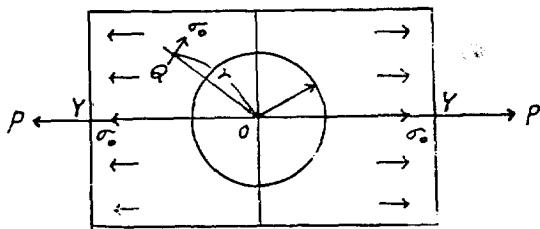


Figure 1. Plane stress of composite including filler.

$$\sigma_0 = 2G_1 \left(\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} \cos 2\theta \right)$$

$$\text{또 } \frac{A}{a^2} = \frac{\sigma_0}{4G_1} \cdot \frac{(1-2\nu_2)G_1 - (1-2\nu_1)G_2}{(1-2\nu_2)G_1 + G_2}$$

$$\frac{B}{a^4} = \frac{\sigma_0}{4G_1} \cdot \frac{G_1 - G_2}{G_1 + (3-4\nu_1)G_2}$$

여기서 a 는 충진체의 반경, G_1, G_2 는 matrix 및 충진체의 전단탄성계수, ν_1, ν_2 는 각각의 Poisson比이다. 한편 Niesen⁴은 板狀충진플라스틱의 모델을 만들어 충진물이 matrix의 가운데에 있고 양자간 接着力이 있는 경우와 접착력이 없는 경우를 고찰해서 각 경우의 복합재료의 力學的性質, 伸張率比 ($\varepsilon_c/\varepsilon_0$), 引張強度 σ_c 및 충격강도 u_c 를 다음과 같이 나타내고 있다.

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = 1 - V_f^{1/3}$$

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c$$

$$u_c = \frac{\sigma_c \cdot \varepsilon_c}{2} = \frac{E_c \cdot \varepsilon_c^2}{2}$$

여기서 ε_0 는 matrix의 伸張率, ε_c 는 複合材料의 伸張率, V_f 는 충진체의 용적 함유율, σ_c 는 복합재료의 引張強度, E_c 및 u_c 는 복합재료의 탄성계수와 충격강도이다.

또한 충진물에 의한 應力集中을 考案해서 引張強度를 比較하면

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \approx (1 - V_f^{2/3})S \text{ 이고}$$

여기서 S 는 應力集中係數이다.

또한 上記의 式들중 E_c 에 관해서 Kerner는

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{G_f \cdot V_f / [(7-5\nu)G_0 + (8-10\nu)G_f]}{G_0 \cdot V_f / [(7-5\nu)G_0 + (8-10\nu)G_f]} + \frac{(1-V_f) / [15(1-\nu)]}{(1-V_f) / [15(1-\nu)]}$$

한편 Eilers-Van Dijck⁶은

$$\frac{E_c}{E_0} = \{1 + [1.25V_f / (1 - \alpha \cdot V_f)]\}^2 \text{을 提案했다.}$$

여기서 E_0, G_0 는 matrix의 세로 및 전단탄성계수, G_f 는 충진체의 전단탄성계수, ν 는 poisson比, α 는 충진체의 겉보기 용적비를 나타낸다. 이들의 式을 고찰해보면 복합재료의 伸張率 ε_c , 引張強度 σ_c 및 충격강도 u_c 중 伸張率과 충격강도 각각의 比는 충진체의 충진율 V_f 가 증가하여도 값이 低下한다. 특히 접착이 없을 경우보다 接着이 있는 경우 현저히 저하함을 알 수 있다. 다만 引張強度比는 接着力이 없는 경우 V_f 가 증감함에 따라 저하하고 접착력이 있는 경우에는 다만 상승하는 곡선을 나타낸다. 이외의 Matsuo⁷ 등은 플라스틱안에 고무를 충진하여 고찰했는데 이 경우 Goodier의 理論의 타당성을 보고하고 있다.

관상충진系에 있어서는 Cox의 단섬유충진복합계의 理論強度式^{8,9}을 修正하여 板狀系로 體系화 시킨 Padawer & Beecher의 修正式과 flake-flake Interaction을 고려한 Piggot의 解析¹¹과 flake 보강효과를 고찰한 Sheperd, Maine, Lusis^{12,13} 등의 연구가 있으나 力學的性質의 低下要因에 대한 定量的 解析은 거의 되어 있지 않다.

纖維狀強化

Fiber와 matrix간의 結合이 完全하게 되면 fiber는 高탄성율의 것을 使用하고 있기 때문에 fiber 주위의 matrix는 그 변형이 구속된다. 이때는 matrix 중에 계면전단력 τ_m 가 作用하고 있는데 이 전단력은 fiber의 끝에 가까운 곳에서 最大值를 나타내며 fiber의 中央部에 가까울수록 크게 감소한다. 이 전단력에 의해서 fiber중에 引張應力이 作用하고 있다. 즉 fiber와 matrix의 탄성율의 차에 의해서 fiber 축방향의 fiber의 表面에 전단력이 발생하며 이 전단력에 의해서 fiber 중에 인장응력이 생기며 따라서 fiber는 應力부담의 機能을 발휘하게 된다. 이와같은 discontinuous

fiber에 의한 強化機構에 關한 應力解析은 Dow¹⁴, Rosen¹⁵ 및 Kelly¹⁶에 의해서 行해지고 있는 데 Rosen과 Dow는 matrix를 탄성으로, Kelly는 matrix를 소성에 들어가는 경우를 해석하였다.

또한 纖維의 配向效果에 따른 파괴 強度論으로서 Kelly-Dabies와 Hill, Hukuda-kawata등의 理論的考察^{17,18}과 Cox, Dow, Rosen 및 Holister等의 解析이 있다^{19,20,21}.

그리고 composites의 破斷은 fiber의 分擔應力이 fiber의 破斷應力에 도달했을 때 일어나기 시작한다. Composites의 引張強度는 다음과 같이 表示된다.

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m' (1 - V_f)$$

여기서 σ_f 는 fiber의 引張強度, σ_m' 는 fiber가 破斷될 때의 strain과 同等한 strain에 있어서의 matrix의 引張應力, V_f 는 fiber의 用적 賦分율을 나타낸다. 上記式으로부터 알 수 있는 바와 같아, composites의 引張強度는 fiber의 強度가 높을수록 그리고 부피분율이 클수록 증가한다. 그러나 最大的 fiber 賦分율에는 fiber의 形狀에 따라 制限이 있다²². 즉 fiber의 斷面이 長方形이고 均一하지 않는한 fiber를 가장 密接하게 配列할지라도 공간이 생기기 때문이다. 예컨대 fiber의 斷面이 圓形인 경우 가장 密接하게 配列할지라도 fiber의 부피분율 V_f 는 約 91%이다. 그러나 fiber와 matrix의 接着等의 問題에 因因해서 生成되는 公간等의 發生때문에 V_f 는 70%以下가 바람직하다는 說이 있다. 特히 高分子複合材料의 경우는 fiber의 부피분율이 증가하면 편연적으로 fiber 상호간의 接觸이 많게 된다. 이러한 fiber間의 接觸部分에는 外部應力下에서 crack이 發生하기 쉬워지며, 따라서 composites의 強度는 현저하게 저하한다. 예컨대 polyethylene이나 polypropylene 등의 matrix를 短纖維로 強化시키면 fiber의 부피분율이 15%까지는 많은 強度의 向上을 보이고 있으나 그 이상에서는 運化된 向上을 보여준다^{23,24,25}. 그렇기 때문에 加工時에는 이와 같은 문제들을 해결할 수 있는 방안을 여러 각도에서 모색해서 理論的인 強度에 接近시키도록 해야 할 것이다.

또한 여기에 덧붙여 基本的인 強化條件을 살펴보면 우선 matrix는 外部로부터의 마모 및 부식등에 대해서 fiber를 보호할 수 있어야 하고 이들兩者的 Poisson比는 大體로 同一하면 좋고 열팽창계수의 差도 차이가 덜 날수록 좋을 것이다. 또한 fiber의 aspect ratio는 가급적 커야할 것이고 fiber의 탄성율은 matrix보다 훨씬 커야하고 使用溫度에서兩者間에 應力이 일어나서는 안되고 複合材料를 만드는 과정에서 fiber의 強度가 均一하지 못하고 변화되어서는 안된다는 것은 필수적인 要件이라고 아니할 수 없다.

3. 파괴 강도 이론

纖維強化複合材料에 있어서 파괴 강도를 規定하기 위해서는 파괴시의 應力狀態를 알아야 한다. 一般的으로 等方性材料에 關해서는 破壞條件으로서 Von Mises²⁶의 條件이 材料의 파괴에 관한 기준으로 많이 適用되고 있다. 3次元應力狀態에 關한 Von Mises의 條件을 보면 다음과 같다.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 = 6k^2 \quad (1)$$

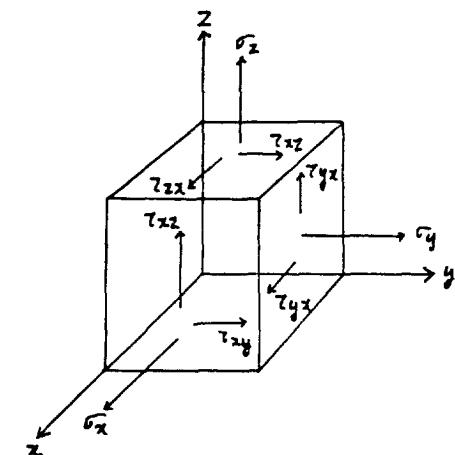


Figure 2. Element of material stress.

여기서 k 는 材料의 파괴强度에 關한 一定한 값이고 각 應力成分은 Fig. 2와 같다.

Von Mises의 彈性壞損에 關한 理論은 最大剪斷應力理論을 修正한 것인데 主應力의 方向을

알 수 있는 경우에는 最大剪斷應力理論을 簡單 하지만 主應力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)의 方向을 잘 알 수 없는 경우에는 壞損의 條件은 剪斷破壞應力を τ_e 로서

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pm 2\tau_e, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm 2\tau_e, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\tau_e \quad (2)$$

로 나누어 쓰지 않을 수 없다. 그래서 이들은 1개의 條件에 다다를 때 破損이 일어나는데 主應力差를 $\sigma_2 - \sigma_3 = 2t_1, \sigma_3 - \sigma_1 = 2t_2, \sigma_1 - \sigma_2 = 2t_3$ 라고 하면 (2)는 $t_1 = \pm \tau_e, t_2 = \pm \tau_e, t_3 = \pm \tau_e$ (3)가 된다. 이것은 t_1, t_2 및 t_3 를 直交座標系에서 보면 原點을 中心으로 한쪽이 τ_e 의 立方體를 나타낸다, 그래서

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad (4)$$

이 성립하는데 應力點 (t_1, t_2, t_3)은 (4)에 나타나는 平面上에 있다. 즉 Fig. 3에서 나타내는 바와 같이 原點을 通해서 各 座標軸과 같은쪽으로 (4)의 平面에서 (3)의 立方體를 짜는곳의 正六角形의 破損의 限界線이 된다.

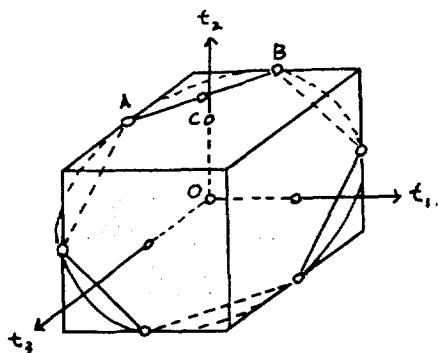


Figure 3. Mises's model.

이 六角形은 복잡한 경우에는 하나의 方程式으로 나타내기에는 불편하다. 그래서 Mises는 이 正六角形에 外接하는 圓을 가지고 破損의 限界線이라고 하는 것을 提唱했다. 즉 그 조건은 (3)의 立方體에 對해 半徑이 $\sqrt{2}\tau_e$ 인 球面

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 2\tau_e^2 \quad (5)$$

를 考察해 이것과 平面 (4)가 만나 얻어지는 圓을 破壞의 限界線으로 한다. 그래서 이것을 主應力에서 나타내면

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8\tau_e^2 \quad (6)$$

이 된다. 그래서 (1)의 條件은 수직應力과 剪斷應力間에 作用하는 任意斷面에 關해서 얻어진 것인데 各主應力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 로 表示하여 (6)에 代入하면 (1)의 條件이 얻어진다. 그러나 Mises의 破壞條件은 等質, 等方性材料에 關하여 얻어지는 것인데 이것을 複合材料에 發展시킨 Hill의 條件²⁷에 대하여 간략하게 考察해 보기로 한다. Mill은 直交異方性材料에 關한 破壞條件은 Von Mises의 理論에 基礎하여 異方性材料에 依한 파라미터인 F, G, M 및 L, M, N을 便用해서 一般의 應力狀態에 關해 다음과 같은 式을 提案했다.

$$\begin{aligned} F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

異方性材料에 依한 파라미터는 各 彈性對稱軸에 關한 強度보다 計算에 의해 구하지만, 또한 x, y, z 軸에 關해 垂直應力 및 剪斷應力에 依한 파괴강도를 X, Y, Z와 R, S, T로 구한다면 異方性材料에 關한 파라미터 F, G, H 및 L, M, N은 다음 式으로 얻어진다.

$$\left. \begin{aligned} 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}, \quad 2L = \frac{1}{R^2} \\ 2G &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}, \quad 2M = \frac{1}{S^2} \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \quad 2N = \frac{1}{T^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

그래서 이것을 一般化시켜 異方性材料에 關한 破壞의 條件을 纖維強化複合材料에 적용하기 위해 2 가지의 가정이 필요한데 그것은 plate로써 平面應力狀態로 생각하여 충분하게 材料의 두께가 얇다고 생각한다. 그래서 plate에 關한 座標軸을 Fig. 4와 같이 생각해 보면

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{이 된다,} \quad (9)$$

그래서 남아있는 應力成分에 의해 (7)式을 쓰면

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (10)$$

이 되고 이를 파라미터에 (8)式을 적용하면 破壞條件은 各成分에 關한 파괴강도를 써서 다음의 式으로 표시된다.

$$\frac{1}{X}\sigma_x^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_x\sigma_y + \frac{1}{Y^2}\sigma_y^2 + \frac{1}{T^2}\tau_{xy}^2 = 1 \quad (11)$$

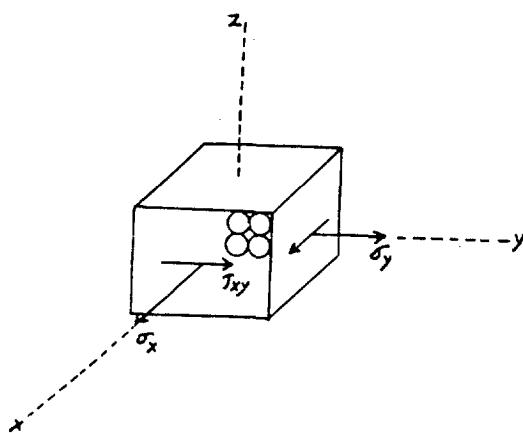


Figure 4. Element of transversely isotropic material.

그래서複合材料에關한 가정으로써 fiber는 x 軸方向으로平行하다고 생각하고 y 軸方向과 z 軸方向과의力學的特性能은 같고 x 및 z 軸方向의 수직응력에關한 파괴강도는

$$Y=Z \quad (12)$$

로 주어지고 (11)式에 (10)式의條件을代入하면纖維強化複合材料의破損條件은 다음式으로주어진다.

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \frac{x^2}{Y^2} \sigma_y^2 + \frac{X^2}{T^2} \tau_{xy}^2 = X^2 \quad (13)$$

이제直交異方性에關한 Hill의破損理論을基礎로하여複合材料의파괴에關해考察해보면纖維強化複合材料의fiber를 X 軸에平行하게配列시킨直交異方性板에서는 $X-Y$ 軸및 $1-2$ 軸에關한應力成分을Fig.5와같이 나타내면應力成分은 다음과같이표시될수있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta + \tau_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

또한 $X-Y$ 軸에關한應力成分을 σ_1 으로나타나면

$$\sigma_2 = n\sigma_1, \quad \tau_{12} = k\sigma_1 \quad (15)$$

로 주어지고 $X-Y$ 軸에關한파괴강도의比를各各 α, β 를써서

$$\alpha = \frac{X}{Y}, \quad \beta = \frac{X}{Y} \quad (16)$$

로表示하고 Hill의條件式(13)에(14)를代入

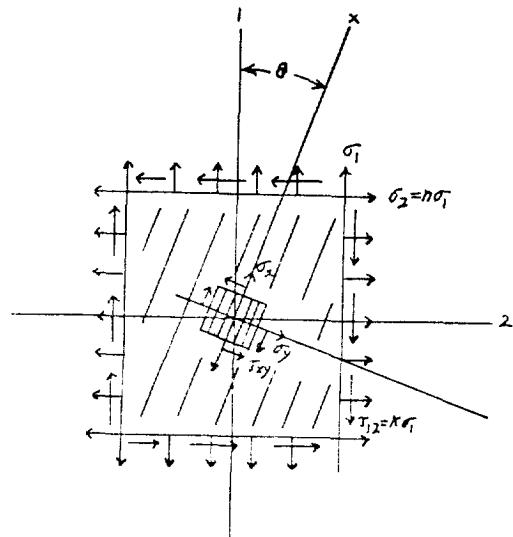


Figure 5. Element of material subjected to plane stress.

하고(15),(16)을利用하고彈性대칭축에對해 θ 인方向에걸리는應力의條件은 다음式으로表示된다.

$$\begin{aligned} &(n^2 - n + \alpha^2 + k^2 \beta^2) \sin^4 \theta + \\ &2k \{3n - 1 - 2\alpha^2 - (n-1)\beta^2\} \sin^3 \theta \cos \theta \\ &+ 8(8k^2 - n^2 + 2n - 1 + 2(n+2k^2)\alpha^2 \\ &+ (n^2 - 2n + 1 - 2k^2)\beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &+ 2k \{3 - n - 2n\alpha^2 + (n-1)\beta^2\} \sin \theta \cos^3 \theta \\ &+ (1 - n + n^2\alpha^2 + k^2\beta^2) \cos^4 \theta = \left(\frac{X}{\sigma_1}\right)^2 \quad (17) \end{aligned}$$

式(17)은任意面에 $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ 가同時에作用하는경우이지만특별한경우1軸방향에수직응력 σ_1 이作用하는경우($\sigma_2 = \tau_{12} = 0$)를생각하면

$$n=k=0 \quad (18)$$

로주어지므로(17)은

$$\alpha^2 \sin^4 \theta + (\beta^2 - 1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = \left(\frac{X}{\sigma_1}\right)^2 \quad (19)$$

로되고彈性對稱軸에關해 θ 方向만큼의任意軸에關한引張破壞強度 σ_1 은

$$\sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{X}{Y}\right)^2 \sin^4 \theta + \left(\frac{X^2}{T^2} - 1\right) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta} \quad (20)$$

로구해진다.이와같은式(20)을利用하면任意方向 θ 에關한複合材料의引張强度를얻을

수 있는바 실측된 값과 比較를 해보면 理論結果의 타당성을 確認할 수가 있다.

4. 結 言

複合材料는 그 強度를 單一材料에 比하여 월등히 높일 수 있고 그 성능을 여러가지 目的에 적합하게 設計할 수가 있다. 그러나 지금은 성능에 比해 용도가 제한되어 있다. 최근 보강재료로 쓰이는 섬유로서는 탄소섬유 및 boron 섬유, 또한 이들과 거의 같은 強度의 polyamide系의 纖維가 생산되고 있다. 또한 whisker의 연속 섬유제조가 sapphire로 부터 열어지며 高溫에서 견딜 수 있는 탄화규소섬유가 제조되고 있다. 한편 thermoplastic matrix도 이에 대한 流動에 關한 研究가 活潑히 行해지고 있어 좋은 結果가 나오고 있다. 그러나 이와같이 두 材料이상을複合시켜 強化된 複合材料를 얻기 위해서는 두 材料의 結合이 우선 문제가 된다. 이를 위해 friction theory, dynamic equilibrium theory, restricted layer theory, wetting and surface energy theory 등으로 說明하려고 하고 있으나 여러방면에서 볼때 아직 명쾌하지 못한 實情이다. 特히 짹이음제와 matrix 와의 結合메카니즘은 實驗結果가 別로 없다. 이밖에도 複合材料는 成形기술에 많이 左右되므로 成形기술의 基礎와 成形理論의 確立을 위해 좀 더 많은 研究가 必要한 立場이다.

참 고 문 헌

1. 高柳素夫, 化學工學, **26**, 1097 (1975).
2. A. Kelly, Strong Solids, Oxford University Press, 1966.
3. J. N. Goodier, *J. Appl. Mach.*, **1**, 39 (1933).
4. L. E. Nielsen, *J. Appl. Polymer Sci.*, **10**, 97 (1966).
5. E. H. Kerner, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **69B**, 808 (1956).
6. H. Eilers, *Kolloid-Z.*, **97**, 313 (1941).
7. M. Matsuo et al, *J. polymer Sci., A-Z*, **10**, 1085 (1972).
8. H. L. Cox, *Brit. J. Appl. phys.*, **3**, 72 (1952).
9. 烏材昭治, 強化プラスチックス, **16**, 46 (1970).
10. G. F. Padawer and N. Beecher, *Polym. Eng. Sci.*, **10**, 185 (1970).
11. M. R. Piggot, *J. Mat. Sci.*, **8**, 1373 (1973).
12. P. D. Shepherd and F. W. Maine, *Composite*, **9**, 193 (1974).
13. J. Lusis, R. T. Woodham, and M. Xanthos, *Polym. Eng. Sci.*, **13**, 139 (1973).
14. N. F. Dow, G. E. Technical Information Series, R63 SD61 (1963).
15. B. W. Rosen, Fiber Composite Meterials, ASM, p. 37 (1965).
16. A. Kelly et al, High Strength Materials, John wiley, 1967.
17. 福田, 河田, 東京大學宇宙航空研究所報告, **10**, 3, 492 (1974).
18. 福田, 河田, ibid., **10**, 3, 472 (1974).
19. 山木準一, 高分子討論會, Part III, 759 (1975).
20. 宮入裕夫, 強化プラスチックス, **17**, 41 (1971).
21. 宮入裕夫, ibid., **17**, 18 (1971).
22. H. T. Corten, Modern Composite Meterials, p37, Addison Wesely, 1967.
23. W. T. Kim and S. W. Kim, *Polymer*, **1**, 37 (1977).
24. W. T. Kim, S. W. Kim, *Polymer*, **2**, 31 (1978).
25. W. T. Kim, and S. W. Kim, *Polymer*, **2**, 77 (1978).
26. V. R. Mises, Theory of Flow and Fracture of Solids, vol. 1, p. 175, McGraw-Hill, 1950.
27. R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press.
28. G. S. Holister, Fiber Reinforced Materials, Elsevier, 1966.